16 2次方程式の解き方

レッスン 3002 平方根の考えを使った解き方①

ポイント

- $x^2 = k$（$k > 0$）の形をした2次方程式
  $x^2 = k$ は「x は2乗すると k になる」という意味だから，
  x は k の平方根である。よって，$x = \pm\sqrt{k}$

  （例）$x^2 = 16$ を解くと，$x = \pm 4$

- $ax^2 + c = 0$ の形をした2次方程式
  c を移項したり，両辺を a で割ったりして，
  $x^2 = k$ の形にすると解くことができる

- $(x+m)^2 = n$（$n > 0$）の形をした2次方程式
  $M = x + m$ とおくと，$M^2 = n$ となるから，
  平方根の考えを使って解くことができる

問題

次の方程式を解きなさい。

(1) $x^2 - 18 = 0$

(2) $25x^2 - 9 = 0$

(3) $(x+3)^2 - 2 = 0$

(4) $2(x-6)^2 = 98$

解答

(1) $x^2 - 18 = 0$
$x^2 = 18$
$x = \pm \mathbf{3\sqrt{2}}$ …（答）

(2) $25x^2 - 9 = 0$

$$25x^2 = 9$$

$$x^2 = \frac{9}{25}$$

$$x = \pm\boldsymbol{\frac{3}{5}}$$ …(答)

(3) $(x+3)^2 - 2 = 0$

$$(x+3)^2 = 2$$

$$x + 3 = \pm\sqrt{2}$$

$$x = \boldsymbol{-3 \pm \sqrt{2}}$$ …(答)

(4) $2(x-6)^2 = 98$

$$(x-6)^2 = 49$$

$$x - 6 = \pm 7$$

$$x = 6 \pm 7$$

$$x = \boldsymbol{-1,\ 13}$$ …(答)

確認テスト　平方根の考えを使った解き方①

次の方程式を解きなさい。

(1) $3x^2 = 6$

(2) $4x^2 - 3 = 0$

(3) $(x-5)^2 - 3 = 0$

(4) $3(x+4)^2 - 300 = 0$

レッスン 3003 平方根の考えを使った解き方②

ポイント

● $x^2 + px + q = 0$ の形をした 2 次方程式
$(x+m)^2 = n$ の形に変形することで解くことができる

問題

次の問いに答えなさい。

(1) 2 次方程式 $x^2+8x-3=0$ を，次のようにして解いた。
空欄 [ア] ～ [オ] にあてはまる数を答えなさい。

$$x^2+8x=3$$
$$x^2+8x+\boxed{ア}=3+\boxed{ア}$$
$$(x+\boxed{イ})^2=\boxed{ウ}$$
$$x+\boxed{イ}=\pm\boxed{エ}$$
$$x=\boxed{オ}\pm\boxed{エ}$$

(2) 2 次方程式 $x^2+x-5=0$ を，$(x+m)^2=n$ の形に変形して解きなさい。

解答

(1)
$$x^2+8x=3$$
$$x^2+8x+\boxed{ア\ \mathbf{16}}=3+\boxed{ア\ \mathbf{16}}$$
$$(x+\boxed{イ\ \mathbf{4}})^2=\boxed{ウ\ \mathbf{19}}$$
$$x+\boxed{イ\ \mathbf{4}}=\pm\boxed{エ\ \sqrt{\mathbf{19}}}$$
$$x=\boxed{オ\ \mathbf{-4}}\pm\boxed{エ\ \sqrt{\mathbf{19}}}$$ …(答)

(2)
$$x^2+x-5=0$$
$$x^2+x=5$$
$$x^2+x+\frac{1}{4}=5+\frac{1}{4}$$
$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{21}{4}$$
$$x+\frac{1}{2}=\pm\sqrt{\frac{21}{4}}$$
$$x+\frac{1}{2}=\pm\frac{\sqrt{21}}{2}$$
$$x=\frac{\mathbf{-1\pm\sqrt{21}}}{\mathbf{2}}$$ …(答)

次の問いに答えなさい。

(1) 2 次方程式 $x^2-6x-4=0$ を，次のようにして解いた。
空欄 [ア] ～ [オ] にあてはまる数を答えなさい。

$$x^2-6x=4$$
$$x^2-6x+\boxed{\text{ア}}=4+\boxed{\text{ア}}$$
$$(x-\boxed{\text{イ}})^2=\boxed{\text{ウ}}$$
$$x-\boxed{\text{イ}}=\pm\boxed{\text{エ}}$$
$$x=\boxed{\text{オ}}\pm\boxed{\text{エ}}$$

(2) 2 次方程式 $x^2+3x-2=0$ を，$(x+m)^2=n$ の形に変形して解きなさい。

レッスン 3004 解の公式を利用する解き方

ポイント

● 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

計算のしくみ

$$ax^2+bx+c=0$$
$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$
$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$$
$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

両辺に x の係数の $\frac{1}{2}$ の 2 乗を加える。

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$
$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

両辺の平方根を計算する。

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

問題

次の方程式を解きなさい。

(1) $x^2+3x-2=0$

(2) $2x^2+3x-4=0$

(3) $6x^2+7x-3=0$

(4) $x^2-8x+4=0$

解答

(1) 解の公式より

$$\begin{aligned} x &= \frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\times1\times(-2)}}{2\times1} \\ &= \frac{-3\pm\sqrt{9+8}}{2} \\ &= \boldsymbol{\frac{-3\pm\sqrt{17}}{2}} \quad \cdots\text{(答)} \end{aligned}$$

(2) 解の公式より

$$\begin{aligned} x &= \frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\times2\times(-4)}}{2\times2} \\ &= \frac{-3\pm\sqrt{9+32}}{4} \\ &= \boldsymbol{\frac{-3\pm\sqrt{41}}{4}} \quad \cdots\text{(答)} \end{aligned}$$

(3) 解の公式より

$$\begin{aligned} x &= \frac{-7\pm\sqrt{7^2-4\times6\times(-3)}}{2\times6} \\ &= \frac{-7\pm\sqrt{121}}{12} \\ &= \frac{-7\pm11}{12} \\ &= \boldsymbol{-\frac{3}{2},\ \frac{1}{3}} \quad \cdots\text{(答)} \end{aligned}$$

(4) 解の公式より

$$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \times 1 \times 4}}{2 \times 1}$$
$$= \frac{8 \pm \sqrt{48}}{2}$$
$$= \frac{8 \pm 4\sqrt{3}}{2}$$
$$= \mathbf{4 \pm 2\sqrt{3}} \quad \cdots(答)$$

確認テスト　解の公式を利用する解き方

次の方程式を解きなさい。

(1) $x^2 - x - 3 = 0$

(2) $3x^2 - 5x + 1 = 0$

(3) $7x^2 + x - 6 = 0$

(4) $3x^2 + 4x - 8 = 0$

レッスン 3005　因数分解を利用する解き方

ポイント

● 2 次方程式 $(x-a)(x-b)=0$ $(a \neq b)$ の解は
$x = a,\ b$

計算のしくみ

$(x-a)(x-b)=0$ のとき，$x-a=0$ または $x-b=0$
よって，$x=a$ または $x=b$

問題

次の方程式を解きなさい。

(1) $(x+1)(x-6)=0$

(2) $x^2-3x+2=0$

(3) $x^2-6x=0$

(4) $x^2+2x+1=0$

解答

(1) $x=\mathbf{-1,\ 6}$ …(答)

(2) $(x-1)(x-2)=0$
$x=\mathbf{1,\ 2}$ …(答)

(3) $x(x-6)=0$
$x=\mathbf{0,\ 6}$ …(答)

(4) $(x+1)^2=0$
$x=\mathbf{-1}$ …(答)

確認テスト　因数分解を利用する解き方

次の方程式を解きなさい。

(1) $(x-2)(x+4)=0$

(2) $x^2-x-56=0$

(3) $2x^2-x=0$

(4) $x^2-6x+9=0$

レッスン 3006 いろいろな２次方程式

ポイント

● ２次方程式の解き方

1 因数分解を利用する

2 $(x+m)^2=n$ の形に変形する

3 解の公式を利用する

問題

次の方程式を解きなさい。

(1) $-x^2-11x-30=0$

(2) $2x^2-8x+2=0$

(3) $(5x+3)^2=12$

(4) $(x+1)(x+5)=-4$

解答

(1)
$$-x^2-11x-30=0$$
$$x^2+11x+30=0$$
$$(x+5)(x+6)=0$$
$$x=\mathbf{-5,\ -6} \quad \cdots (答)$$

(2)
$$2x^2-8x+2=0$$
$$x^2-4x+1=0$$

解の公式より

$$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\times1\times1}}{2\times1}$$
$$=\frac{4\pm2\sqrt{3}}{2}$$
$$=\mathbf{2\pm\sqrt{3}} \quad \cdots (答)$$

(3)
$$(5x+3)^2=12$$
$$5x+3=\pm2\sqrt{3}$$
$$5x=-3\pm2\sqrt{3}$$
$$x=\mathbf{\frac{-3\pm2\sqrt{3}}{5}} \quad \cdots (答)$$

(4)
$$\begin{aligned}(x+1)(x+5) &= -4\\ x^2+6x+5 &= -4\\ x^2+6x+9 &= 0\\ (x+3)^2 &= 0\\ x &= \mathbf{-3}\end{aligned}$$
…(答)

確認テスト　いろいろな 2 次方程式

次の方程式を解きなさい。

(1) $3x^2-15x+12=0$

(2) $4x^2+8x-20=0$

(3) $(2x-3)^2=5$

(4) $(x-4)(x+4)=-6x$